

“数学分析”课程的教与学

“学在交大——交大有门数学课”媒体座谈会上的发言

裘兆泰

摘要：本文是上海交通大学数学科学学院的裘兆泰老先生在“学在交大——交大有门数学课”媒体座谈会上的讲话稿。裘老师在讲话中谈到要想让学生在抽象枯燥的“数学分析”课程中收获知识，提升数学思维和数学素养，需要做到：写好“剧本”，抓住学生的“热点关注”；设计好“场景”（桥段），引导学生积极参与；回归教学主题，着眼学生素质提升这样几点。从裘老师的分享能看出，他对学生的学习特点非常了解，在课堂上时刻践行着以学习效果为中心的理念，这些值得所有教师学习和效仿。

关键词：数学分析，大学生，数学素养

1 引言

我是担任数学基础课教学的老师，目前正在为工科（电信学院）同学讲授以往只适用于理科的数学分析课程。同学刚入学时可以在“高等数学”与“数学分析”两门课中自主选择其中一门，不少同学一开始信心满满：“当然是选数学分析”，但几次课上下来感觉就不灵了——从内容到思想到方法，都与中学大大地不一样！更难适应的是数学分析本身的抽象性，所强调的概念重要性与推理严密性。要说数学分析是大学一年级基础课中最难的一门课程，这恐怕也不为过，至少大部分同学都有这个感觉。

在数学分析基础课的教学过程中，教师的主导和引领起很大作用。从开始阶段提升学生的信心，适应大学学习生活；进一步培养学生兴趣，渐入佳境而融入数分天地；直到全面增强学生数学能力和科学素养，达到数分训练的目的。

这是一个过程，其间有许多工作要做，就数学分析的教学这一点上来说，这么多年来我主要是专心地做好三件事：写好“剧本”；设计好“场景”；回归教学主题。

主讲人简介：裘兆泰，男，上海交通大学副教授，曾获得上海市“十佳好老师”、全国师德先进个人、上海交通大学最受欢迎的教师等荣誉称号。

2 写好“剧本”，抓住学生的“热点关注”

对于大一同学来说，数学分析确实并不好学。说穿了，学生在中学阶段接受的数学训练还是有欠缺的：对概念不太重视，对分析论证不习惯不擅长。特别是不会分析问题，不会利用条件，甚至根本找不到解决问题的“切入点”。

我在想：讲课时将问题都讲清楚了，学生也都听明白了，但这事实上这并不是教学的最终目的，学生心里会有疑问：怎么会想到这个方法？怎么会得出这个结果的？这个问题不处理好，学生只能在前辈数学大师面前自叹弗如。

我的“剧本”（讲义）编写与教材内容并不很一致，许多地方也不是按标准程序写的，而是注意抓“热点”。所谓“热点”，也就是学生关注的重点：“问题怎么想”，“条件怎么用”。

在介绍一些大定理或者难题时，我往往采用这样的方法：或者是先找“切入点”，然后在分析思路时一一梳理条件，看哪些能“为我所用”；或者是用同学所熟悉的框图形式，列出主干线，以框图的架构梳理出各条件之间的相互关联性，以及在论证过程中所起到的作用，看如何能“举纲张目”。总之，是要事先估计到学生在哪些地方会难于理解，难于接受，在编写“剧本”时就确定好主题：应该告诉学生什么？让学生从中学会什么？我认为这一点很重要。

当然，好的“剧本”还要有“亮点”或是“创新点”，要有自己独到的见解。好在我们有一本比较好的自编教材，它集中了数分课程组老师们多年教学研究的成果，里头许多内容在思想上、方法上有创新，论证过程特别简洁清晰而且不失严密性。比如罗彼塔法则的新证明，定积分和线面积分应用公式的新推导，上、下极限在实数基本定理中的新应用，等等。每次讲到这些与众不同的“创新点”，总会引起同学的兴趣和关注，往往在课后还意犹未尽，围聚在一起讨论，还要找老师进一步“探讨探讨”。

3 设计好“场景”（桥段），引导学生积极参与

交大很强调学生的“主动学习”和“互动学习”，要求增强学生在教学过程中的参与度，提高学生的学习积极性。本意很好，效果不错。我过去在小班教学中也用过一些行之有效的方法，象课堂讨论、课外读书报告和习题报告、小论文征集，等等。不过现在不太用了，因为教学条件变了（课时大大紧缩，“课堂讨论”没有时间上的基本保证），授课对象情况不一样了（计划排定 140 人的大班已经是太大了，结果来了将近 200 个学生听课，大范围的“互动”效果并不好），但也不是说，现在教师上课只有唱“独角戏”这一条路。

在介绍定理和例题，特别是在讲证明题时，我会在学生容易疏忽、容易出错的地方设置一些“陷阱”：或者是很隐蔽地错用条件或方法，或者是在很不起眼的地方混淆概念或遗漏关键点。介绍时绝对是一本正经的，讲完后再向学生发问：“这个证明可以吧？没有问题就‘Pass’进入下一环节了”。基础好的同学细心琢磨后通常会看出问题提出疑问，一般同学一

时找不出毛病,但也很想知道这样做究竟对不对,因为他们平时就是这样想这样做的,没有觉得有什么错。

即使学生没有能找到问题,或者没有找对问题,在大部分情况下当一步一步重新来过,再次对每一步过程进行细致的审视和验证时,同学会发现是哪一步出毛病了。然后再提问:是否可以补救?如何补救?这样的分析讨论当然要多费一点时间,但能引起同学的关注和参与,可以提高学生分析问题的能力,同学都能从中收益。

在平时的短信答疑中经常还会碰到这样的事,比如有学生质疑,问关于正项级数判敛的一个问题。这个级数的形式比较特殊,它的通项是用一个有点“诡异”的积分形式给出的,学生没有见过这类问题,就发短信来问了:“老师,这个积分算不出啊,请提示一下。谢谢哦!”回信:“这个积分我也算不出来,没法提示啊,所以不用谢了”。再问:“那怎么判敛呢”?回信:“正项级数判敛一定要先求出通项表示式吗”?他说:“哦哦,可以用比较法放大”。一会儿又来短信:“放大后还是不行啊,放大后的级数发散了”。问他:“你是怎么对通项放大的”?说是:“将分子中的正弦平方项放大为1呀”。回信:“既然你用了比较法,就只有这一条路可走吗”?过了一段时间又收到短信,还是这位同学的:“将分母缩小也不行啊,还是得不出结果,恳请老师再提示一下”。不作回答了,冷处理,你自己去想吧,回复其他同学短信了。又过了一阵,来了封短信:“可以对分母进行处理,将分母放大,最后得出级数是发散的,对吗”?回信:“OK”!顺便给他发一个笑脸鼓励。

这个问题本身并不典型,但反映出的问题很典型,至少说明几点:①习惯性思维,正项级数只要用比较法就是放大判敛;②碰到问题不会转弯,换一种方式思考;③学习上有惰性,最好老师告诉你方法,告诉你步骤,告诉你结果。

这个习题后来是作为习题课例题介绍的。我把短信答疑的对话设计成一个“桥段”,着重说明如何从无头绪中找到“切入点”,从错误到正确的思考方法和解决问题的过程。最后再告诉同学一个直观性的经验体会:对这类问题其实还可以“一步到位”看出关键点,直接通过放缩方法快速判其敛散性。我想,这样应该比直接讲一个正确方法更好!

正是因为一直在注重教学方式方法的改进,使教学更有实效,更能切合学生的需求和关切;一直在注重保证数分严密、严格、严谨的前提下,化复杂为简易,化神奇为平凡,使数分能够为同学所理解和接受。这些年来,这门课程受到同学的欢迎和好评,前来“蹭课”的同学很多,外校的学生有时也会跑来听课。去年课程结束后,曾有同学写来一封长信,信中这样说:“因为有了数学分析,使我对数学产生了真切的热爱和兴趣,被数学世界深深吸引,一生的轨迹就此改变”。这位同学立志将数学作为自己的事业,为此改变了原来的专业方向,报考并进入致远学院数学班。

4 回归教学主题,着眼学生素质提升

首先说明:这里所说的素质,并不包含思想政治素质。

就数分教学的目标来看,是希望提升学生的学习能力,至少要领悟一点数学思想,有一定的数学素养,并且养成良好的学习习惯、思维习惯和研究问题的习惯,当然还有科学、规范的表达方式。

现在还有一个新常态的说法:“创新能力”。不过我认为作为基础课而言,要大一同学在数分上有所“创新”并不很现实。但是,我们一直很提倡学生在学习上要有好奇心,鼓励学生对问题进行探索,一旦发现同学确实有好思想好方法,就予以肯定并在班上做推广交流。目的是为同学夯实数学根基,为他们今后的专业“创新”打下基础。事实上同学在跟我平时交流和短信联络中,有许多就是问题讨论:“老师,我对这个问题一个新的想法,请你看看这样想对吗”?或者是:“老师,我这样做为什么会出现问题呢”?

上学期我应邀做了一个访谈,对象是大一正在学习数分的同学,交流主题就是:“数分的基本思想和学习方法论”,但涉及的话题太多,花费的时间很长,看来是不适合作为发言内容的。

不过,对于提高学生的数学素养,倒还是有些话要说。

交大学生基础比较好,天赋比较高,灵气比较足,这是事实,但是不少同学在数学素养方面仍有欠缺,更多的表现是:①丢三落四——该写的不写,该证的不证;②颠三倒四——因果关系颠倒,前后次序反置;③瞎三话四——乱下断语,而且随手拿来就当成命题使用。

以前改学生作业要花很大精力给学生“做规矩”,现在作业主要是由助教负责,主讲教师抽查,但是“规矩”还是要做的。好在数分考试、考查的试卷仍然都是我们自己改,因此每次通过改卷告诫学生、警示学生:按数分要求你应该怎么做,不应该怎么做。比如

出现概念性错误,该步以下不再记分,并且指出问题所在;

方法应用上错误,不管是违背运算法则,还是不合法的所谓“等价代换”,该步以下不再计分;

未经验证就随便下断语,无论对错一律视为无效。结论错的会给出反例;结论对的则告知:“口说无凭,要看证明!因未经过验证,故结论不予认同”。

做对了呢?也未必就是满分。有的学生花了很大篇幅去验证那些本来应该熟练掌握,并且要求熟练应用的基本结论,这说明他没有搞清哪些是属于基本内容,是应该而且必须直接使用的。批语是:“你证明了不该证明的常用结果,纯属‘蛇足’,不但无功,而且有过,故予以扣分”。

还有,明明是简单明白的基本问题,学生却是兜了一个很大的圈子,写了不少废话,做了不少无用功,虽然最后也做对了,但批阅时会明确告诉他:“方法可用,结论无误,但对于舍近求远、舍易求繁的解法不提倡、不鼓励,故予以扣分”。

另外,乱用或者漏用数学记号,中文叙述有病句或者错别字,等等,也同样视为错误。所以在试卷上出现倒扣分是常见的,正常的,最后得负分情况也属于常态。

尽管学生得分普遍不高,每次考查不及格的一大堆,不通过率的“环比”会高出许多,不过事后同学找我理论要求加分的倒是从来没有碰到过。因为,每扣1分我都写明理由,即使

同学做对了但方法不好,我也会给他提供一个更好的思路,让他进一步考虑。同学对此感受很深,说:以前从来没有受过这样的训练。

5 总结

最后要说明的是学生素质的养成不是一朝一夕的事,目前所做的能够起到“警示”作用,会引起学生的警觉和重视,但时间一长部分同学又难免旧病重犯,要再来“警示”不断地敲木鱼。就像城管执法管街头乱设摊,管一次好一阵,关键还是要有长效机制。科学思维和科学表达的养成也是这样,要通过长期言传身教和潜移默化,才能成为学生一种本能反应和习惯动作。

即使对于课堂教学而言,也不可能每次都出彩,每章每节都有“桥段”。数学教学的根本点还是在于知识的传授、思想的熏陶、能力的提升、素质的养成,在这些根本点上,作为教师还有许多工作要做!

Teaching and Learning of mathematical Analysis

“Learning in Jiaotong University—there is a mathematics course in Jiaotong University” media forum speech

Qiu Zhaotai

Abstract: This is the transcript of a speech delivered by Qiu Zhaotai, a professor from the School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University, at a media seminar on “Learning in Jiaotong University—There is a mathematics course in Jiaotong University”. In his speech, Teacher Qiu said that in order to let students in the abstract and boring “mathematical analysis” course to gain knowledge, improve mathematical thinking and mathematical literacy, need to do: write a good “script”, catch students “hot attention”; Design the “scene” (bridge segment), guide students to participate actively; Return to the teaching theme, focus on the improvement of students’ quality. From teacher Qiu’s sharing, we can see that he has a very good understanding of students’ learning characteristics and always practices the concept of learning results as the center in class, which is worth learning and imitating by all teachers.

Key words: Mathematical analysis; college students; mathematical literacy